

Ivo Lah

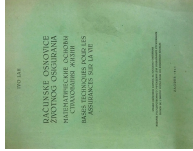
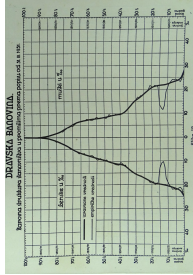


Štrukljeva vas: Lahov rojstni kraj – Lah's birthplace

Ivo Lah se je rodil 5. septembra 1896 v Štrukljevi vasi pri Cerknici. Ljudsko šolo je obiskoval v Sv. Vidu pri Cerknici in v Ljubljani, kjer je šolanje nadaljeval na klasični gimnaziji, ki jo je decembra 1915 dokončal z najboljšimi ocenami. Od leta 1918 je študiral matematiko in fiziko, en semester na Dunaju, nato sedem semestrov v Zagrebu, kjer je končal študije aprila 1925. Študiral je tudi poslovne in prometne znanosti, ki jih je končal z državnim izpitom. V prvi svetovni vojni se je boril kot prostovoljec.

Ivo Lah je bil leta 1921 asistent za matematiko na Gozdarski fakulteti v Zagrebu, od 1921 do 1950 pa je delal na Zavodu za socialne in zavarovalne zadeve v Ljubljani. Zagrebu in Beogradu, nato na Federalnem statističnem uradu v Beogradu do decembra 1956, ko je bil upokojen. Umrl je 23. marca 1979 v Ljubljani.

Lahova znanstvena bibliografija obsega okoli 120 naslovov. V letih 1954 in 1955 je objavil enakost, v kateri nastopajo Lahova števila $L(n, k)$.



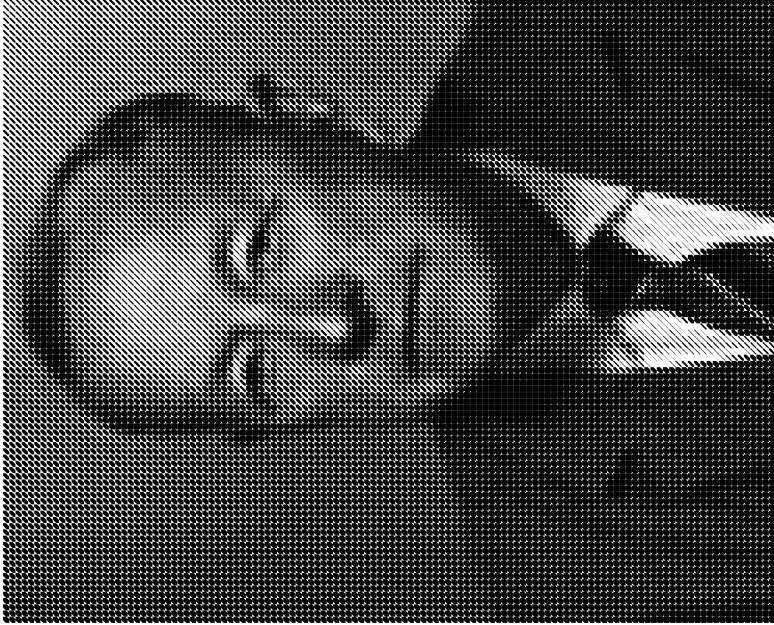
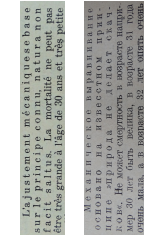
Lahovo najpomembnejše delo je trojezična knjiga *Računske osnove životnog osiguranja*, ki je izšla 1947 v Zagrebu.

Ivo Lah was born on September 5, 1896, in Štrukljeva vas near Cerknica. He attended the folk school in Sv. Vid near Cerknica and continued his education at the classical grammar school in Ljubljana, from which he graduated in December 1915 with top marks. From 1918, he studied mathematics and physics, one semester in Vienna, then seven semesters in Zagreb, where he graduated in April 1925. He also studied business and transport sciences, which he completed with a state examination. In the First World War, he fought as a volunteer. In 1921, Ivo Lah was an assistant of mathematics at the Faculty of Forestry in Zagreb, and from 1921 to 1950 he worked at the Institute for Social and Insurance Affairs in Ljubljana, Zagreb and Belgrade, then at the Federal Statistical Office in Belgrade until December 1956, when he retired. He died on March 23, 1979, in Ljubljana. Lah's scientific bibliography comprises about 120 titles. In 1954 and 1955, he published an identity in which the Lah numbers $L(n, k)$ appear.

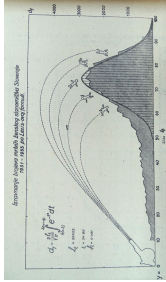


$L(n, k)$ were called *unsigned Lah numbers* by J. Riordan in his book *An Introduction to Combinatorial Analysis* (1958).

$$\begin{aligned}x^{\overline{n}} &= x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1), \\x^{\underline{k}} &= x(x-1)(x-2) \dots (x-k+1), \\x^{\overline{n}} &= \sum_{k=0}^n L(n, k) x^{\underline{k}} \quad (\text{Lah's identity}).\end{aligned}$$



* 1896 Štrukljeva vas – † 1979 Ljubljana



Mehanika izraža vrhanje se ne na poznatom principu, natura non facit saltus. No može mortalitet u stat. 31. godišnjem vrhu maleno, a u starosti 32. opet vrlo velik. Itd. Bit mehanikog izražavanja sastoji se u tome, da je više susednih surovih smrti, yjovojatnosti sublonaki izračunamo neku srednju srednju vrhanje.

Natura non facit saltus were the words that angered the Yugoslav authorities.

Glasnik Udruženja aktuara Kraljevine Jugoslavije

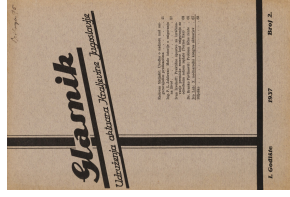
The Bulletin of the Society of Actuaries of the Kingdom of Yugoslavia

Aktuarska združenja in revije

V Jugoslaviji je bilo leta 1933 ustanovljeno Udruženje aktuara Kraljevine Jugoslavije s sedežem v Zagrebu. V letih 1937–1940 je v Ljubljani četrtno izhajal *Glasnik Udruženja aktuara Kraljevine Jugoslavije*. Glavni urednik revije, ki je objavljala prispevke v jezikih tedanje Jugoslavije v latinici in cirilici, je bil Ivo Lah. To je bila prva revija na slovenskih tleh, ki je objavljala članke iz aktuarstva in zavarovalništva, pa tudi iz demografije, statistike in matematike. Njeno izhajanje je prekinila vojna.

Na slikah so prikazane naslovnice vseh, večinoma dvojnih številk revije s kazali vsebine. V njej je 17 avtorjev objavilo 37 člankov (brez upoštevanja obvestil, seznamov članov in podobnih zapisov). Društvo je takrat imelo od 25 do 28 članov.

V povojnem obdobju v Sloveniji ni izhajala nobena revija z aktuarsko tematiko. Po osamosvojitvi, leta 1997, pa je bilo ustanovljeno Slovensko aktuarsko društvo. V letih 2005–2013 je v tiskani obliki izhajala revija *Zavarovalniški horizonti: revija za zavarovalništvo in aktuarstvo*, v letih 2014–2018 pa je izhajala le na spletu. Zadnja številka je izšla maja 2018, potem pa je revija zaradi pomanjkanja člankov usahnila.

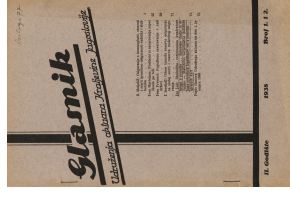


Lahove objave / Lah's publications

1. Najlepše poglavje zavarovalne matematike [The most beautiful chapter of insurance mathematics], *I*(1937), 1, 30–39.
2. X. mednarodni kongres aktuarjev [10th International Congress of Actuaries], *I*(1937), 2, 67–83.
3. Premije in rezerve družinskega zavarovanja [Family insurance premiums and reserves], *I*(1937), 3–4, 117–126.
4. Statistično-verjetnostna kvadratura kroga s pomočjo ... šahovske deske in šivanke. – Statistično verjetnostna določitev baze prirodnih logaritmov »e« s pomočjo ... igralnih kart [Statistical-probabilistic squaring of a circle using ... a chessboard and a needle. – Statistically probabilistic determination of the base of natural logarithms »e« using ... playing cards], *2*(1938), 1–2, 72–76.
5. Zavarovalno-tehnične naloge državne statistike in ljudskih štetij [Actuarial tasks of official statistics and population censuses], *2*(1938), 3–4, 120–127.
6. Pokojninsko zavarovanje obrtnikov [Pension insurance for craftsmen], *3*(1939), 1–2, 39–49.



Vr / Source: UPN/NEN:Slap:CRDSOPST from <http://www.dlib.si>

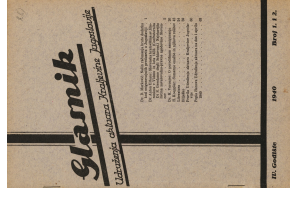


Actuarial associations and journals

In Yugoslavia, the Society of Actuaries of the Kingdom of Yugoslavia was founded in 1933, with its headquarters in Zagreb. Between 1937–1940, the *Glasnik Udruženja aktuara Kraljevine Jugoslavije* was published quarterly in Ljubljana. The editor-in-chief of the journal, which published contributions in the languages of the then Yugoslavia in both Latin and Cyrillic scripts, was Ivo Lah. This was the first journal on Slovenian soil to publish articles on actuarial science and insurance, as well as on demography, statistics, and mathematics. Its publication was interrupted by the war.

The images show the covers of all, mostly double, issues of the journal with tables of contents. In it, 17 authors published 37 articles (excluding various announcements, membership lists, and similar entries). At the time, the association had 25 to 28 members.

In the post-war period, no journal with an actuarial theme was published in Slovenia. After independence, the Slovenian Actuarial Association was founded in 1997. Between 2005–2013, the printed version of the journal *Zavarovalniški horizonti: revija za zavarovalništvo in aktuarstvo* was published, while between 2014–2018, it was published only online. The last issue was published in May 2018, after which the journal ceased publication due to a lack of articles.



O rojstvih, življenju in umiranju Slovencev

On births, lives and deaths of Slovenians

Tablice umrljivosti

Za korekten izračun premij pri življenjskih zavarovanjih so bistvene verjetnosti smrti za različne starosti moških in žensk. Od tega je odvisna tudi pričakovana preostala življenjska doba, kar je ključen podatek za rentna in pokojninska zavarovanja. Oboje je mogoče izračunati iz tablic umrljivosti.

Prve tablice umrljivosti je že leta 1693 objavil slavn astronom Edmond Halley, kasneje pa so jih na podlagi popisov prebivalstva izdelovale posamezne države. Na podlagi izkušenj iz svojih zavarovalnih portfeljev so tablice umrljivosti sestavljale tudi posamezne večje zavarovalnice.

Prva tablica umrljivosti slovenskega naroda

Ivo Lah je prvo tablico umrljivosti slovenskega naroda sestavil na osnovi statistike umrljivosti nekdanje Dravske banovine v letih od 1931 do 1933, objavljena pa je bila v *Slovenčevem koledarju* leta 1942. Za moške so navedeni naslednji podatki: starost x , verjetnost smrti q_x , število živih l_x , število mrtvih d_x in pričakovana preostala življenjska doba e_x . Analogno velja za ženske, pri katerih starost označujemo z y . Upoštevane so starosti od 0 do 100 let. Vrednosti v tabelah niso izravnane, na grafih pa so prikazane tako surove kot izravnane vrednosti.

Kasnejša uporaba prve tablice umrljivosti

Isti izhodiščni podatki so bili upoštevani za izračune aktuarskih tabel, objavljenih leta 1947 v knjigi *Tabele za finančno in aktuarsko matematiko*, katere avtorja sta Ivo Lah in Friderik Žorga, ter v Lahovi knjigi *Računske osnovice životnog osiguranja*, ki je izšla istega leta. V obeh knjigah so verjetnosti smrti izravnane po Karupovi oskulacijski metodi.

Life tables

For the correct calculation of life insurance premiums, the probabilities of death for different ages of men and women are essential. The expected remaining life expectancy also depends on this, which is a crucial piece of data for annuity and pension insurance. Both can be calculated from mortality tables.

The first life tables were published as early as 1693 by the famous astronomer Edmond Halley, and later they were produced by individual countries based on population censuses. Based on the experience from their insurance portfolios, mortality tables were also compiled by individual major insurance companies.

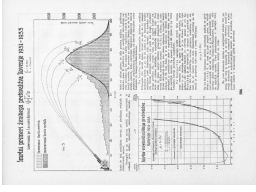
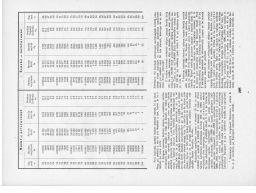
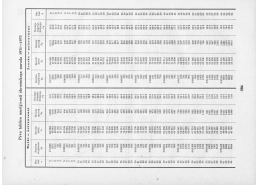
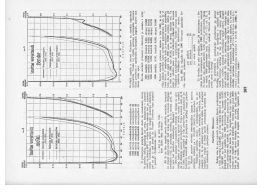
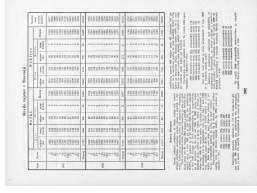
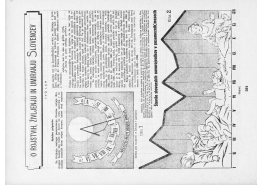
The first life table of the Slovenian nation

Ivo Lah compiled the first life table of the Slovenian nation based on the mortality statistics of the former Drava Banovina in the years 1931–1933, and it was published in the *Slovenčev koledar* in 1942. For men, the following data are given: age x , probability of dying q_x , number of survivors l_x , number of deaths d_x and remaining life expectancy e_x . Analogously for women, for whom age is denoted by y . Ages from 0 to 100 years are taken into account. The values in the tables are unadjusted, while the graphs display both raw and graduated values.

Later use of the first life table

The same baseline data were used for the calculations of actuarial tables published in 1947 in the book *Tables for Financial and Actuarial Mathematics* by Ivo Lah and Friderik Žorga, and in Lah's book *Actuarial Bases of Life Insurance*, published in the same year. In both books, the probabilities of dying are graduated according to Karup's osculatory method.

Članek / Article



Vir / Source: Slovenčev koledar (1942), 2021, 201–206, URN:NBN:SI:DOC-7BF19IQ7 from <http://www.dlib.si>

Včasih : danes / Sometimes : today

Leto Year	Na 1000 prebivalcev Per 1000 inhabitants			Pričak. življ. doba Life expectancy	
	živoorojeni live births	umrli deaths	prirastek increase	moški males	ženske females
1931	27,2	16,9	10,3	50,1	54,2
2024	7,9	10,1	-2,2	79,5	84,8
2025	8,0	10,0	-2,0	79,7	85,1

Objave v tujih aktuarskih revijah

Publications in foreign actuarial journals

Globalno strokovno sodelovanje

Poleg članstva v jugoslovanskem združenju je bil Ivo Lah od leta 1935 tudi član Združenja švicarskih aktuarjev. V njihovi reviji *Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker* (znani tudi pod alternativnim imenom *Bulletin de l'Association des Actuaires Suisses* in kasneje dodanim angleškim *Bulletin of Swiss Association of Actuaries*) je v letih 1947–1953 objavil šest člankov v nemščini, v katerih obravnava t. i. »problem obrestne mere«.

Navezal je številne stike z aktuarskimi zvezami in inštituti v Evropi, Severni in Južni Ameriki ter Aziji. Med njimi je bil tudi inštitut, ki je izdal *Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses*. Revija ne izhaja več, ker se je z nekaterimi drugimi nacionalnimi aktuarskimi revijami združila v *European Actuarial Journal*. V tej manj znani portugalski reviji je v letih 1950–1964 objavil 10 člankov, med njimi tudi *A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics*.

V srednjem stolpcu so navedeni članki iz omenjenih revij. Revija *Journal of the Institute of Actuaries* (JIA), ki je objavljala kratka obvestila o člankih v tujih aktuarskih revijah in o kongresih, je objavila obvestila za vse. Vendar pa Lahov članek z novimi števili, kasneje poimenovanimi po njem, ni zbudil pozornosti.

Regija / Region	Znanstvena / strokovna aktuarska revija / Academic / professional actuarial journal	Začetek / First Publ.	Št. člankov / No. of arts.
GBR	<i>Journal of the Institute of Actuaries</i>	1852	
NLD	<i>Archief voor de Verzekerings-Wetenschap</i>	1888	
FRA	<i>Bulletin trimestriel de l'Institut des Actuaires Français</i>	1890	
WLD	<i>Bulletin de Comité permanent des Congrès Internationaux d'Actuaires</i>	1895	2
BEL	<i>Bulletin de l'Association des Actuaires Belges</i>	1895	
CHE	<i>Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker</i>	1906	6
NOX	<i>Scandinavian Actuarial Journal</i>	1914	1
DEU	<i>Blätter für Versicherungs-Mathematik und verwandte Gebiete</i>	1928	2
ITA	<i>Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari</i>	1930	
YUG	<i>Glasnik Udruženja aktuarja Kraljevine Jugoslavije</i>	1937	6
ESP	<i>Anales del Instituto de Actuarios Españoles</i>	1943	
PRT	<i>Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses</i>	1946	10
AUT	<i>Mitteilungen der Actuarvereinigung Österreichs</i>	1971	

Z švedsko oznako revije (otomna pilcrow navedeno) so se let 2011 združile v *European Actuarial Journal* (EAJ). Journals marked with an asterisk (or their successors) merged into the *European Actuarial Journal* (EAJ) in 2011.

Lahove objave / Lah's publications

Bulletin of Swiss Association of Actuaries

1. Das Zinsfussproblem, 47(1947), 1, 167–247.
2. Eine praktische Interpolationsformel des Zinsfussproblems von hoher Präzision, 51(1951), 1, 91–100.
3. Eine neue Funktion der Versicherungsmathematik und ihre Anwendung, 51(1951), 2, 191–210.
4. Noch einige praktische Interpolationsformeln des Zinsfussproblems von hoher Präzision, 52(1952), 2, 161–172.
5. Die Taylorsche Reihe der generalisierten Poukaskaschen Funktion und ihre Anwendung, 53(1953), 1, 78–91.
6. Das Zinsfussproblem der Anwartschaften, 53(1953), 2, 155–165.

Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses

1. Eine Interpolationsformel des Zinsfussproblems für steigende Renten, (1950), 5, 107–117.
2. Noch einige Interpolationsformeln des Zinsfussproblems für steigende Renten, (1952), 7, 7–16.
3. Die Vorteilhafteste Interpolation der Rentenbarwerte, (1953), 8, 7–20.
4. A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics, (1954), 9, 7–15.
5. Die vorteilhafteste Interpolation der Barwerte der steigenden Renten, (1954), 10, 29–38.
6. Analytical graduation of fertility rates, (1955), 11, 1–7.
7. Analytische Ausgleichung empirischer Summenfunktionen, (1956), 12, 17–40.
8. Generalization of some formulae for mechanical graduation, (1963), 19–20, 15–27.
9. Analytical graduation of fertility and marriage rates for single persons calculated from population censuses, (1966), 22, 1–28.
10. Analytical graduation with boundary conditions, (1969), 25–26, 1–20.

Global professional cooperation

In addition to his membership in the Yugoslav association, Ivo Lah was also a member of the Association of Swiss Actuaries from 1935. In their journal *Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker* (known also by its alternative name *Bulletin de l'Association des Actuaires Suisses* and subsequently by its English name *Bulletin of Swiss Association of Actuaries*), he published six articles in German between 1947 and 1953, addressing the so-called "interest rate problem".

He established numerous contacts with actuarial associations and institutes in Europe, North and South America, and Asia, among them the institute that published the *Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses*. The journal is no longer published as it merged with several other national actuarial journals to form the *European Actuarial Journal*. In this lesser-known Portuguese journal, he published 10 articles in the years 1950–1964, including *A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics*.

The middle column lists the articles from the aforementioned journals. The *Journal of the Institute of Actuaries* (JIA), which published short notices about articles in foreign actuarial journals and about congresses, published notices for all of them. However, Lah's paper with the new numbers, later named after him, failed to attract attention.

LAH, I. *A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics*, pp. 7–15. The 'new numbers' $\mathcal{G}_n$ are defined by

$$x(x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1) \equiv (x+n-1)^{(n)} \equiv \sum_{j=1}^n (-1)^j \mathcal{G}_j^{(n)} x^j.$$

Their relationship with the author's new function M_n of 1951 (see *J.I.A.* 78, 140) is expressed by

$$M_n = \sum_{j=1}^n \mathcal{G}_j^{(n)} \psi^j \frac{d^j a_x}{dx^j}.$$

Vr. / Source: JIA, 81(1956), 2, via JSTOR: 41139151

Računske osnove so statične, obrestne mere se spreminjajo

Calculation bases are static, interest rates change

Problem obrestne mere

Glavno aktuarsko vprašanje, s katerim se je ukvarjal Ivo Lah, je bil problem obrestne mere. Lah ga je definiral kot iskanje enostavnih formul za hitro izračunavanje poljubnih zavarovalnih vrednosti pri obrestnih merah, ki v obstoječih računskih osnovah niso upoštevane. Tedanje uveljavljene metode so temeljile na raznih interpolacijah (če so bile na voljo tabele za več obrestnih mer), razvoju v Taylorjevo vrsto in različnih aproksimacijskih formulah.

Ivo Lah je ugotovil, da so dotedanje aproksimacijske formule bodisi preveč zapletene bodisi premalo natančne. V članku *Das Zinsfussproblem*, ki je izšel leta 1947 v reviji švicarskega aktuarskega društva *Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker*, je zato predstavil izvirno sintezo različnih pogledov na problem obrestne mere.

Na podlagi Lahovega dela je nizozemski aktuar Willem J. C. de Heer (1903–1988) leta 1953 v Amsterdamu doktoriral z disertacijo *Benaderingsformules voor actuariële grootheden bij overgang op andere interestvoet* (Približne formule za aktuarske vrednosti pri prehodu na drugo obrestno mero). V tej 94-stranski disertaciji je celotno 4. poglavje (na 35 straneh) posvečeno delu Iva Laha.

Ivo LAH. *Das Zinsproblem*, pp. 167–247. The differential equation

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sigma_k^k \frac{d^k a_x}{dx^k} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d^k a_x}{dx^k} = \frac{n+1}{n} \frac{S_{x+1}^{(n+1)}}{S_x^{(n+1)}} \left(\sum_{k=1}^n \sigma_k^k \frac{d^k a_x}{dx^k} \right)^2,$$

where the σ_k^k are Stirling's numbers defined by

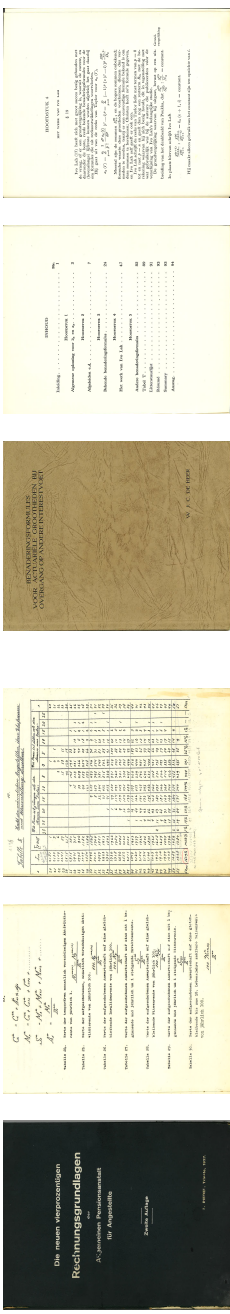
$$x^n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^k x^{\underline{k}},$$

and

$$S_x^{(n)} = \frac{1}{n!} \omega_{-x} \sum_{t=0}^n (n+t)^{(n)} D_{x+t},$$

plays a fundamental role in problems involving changes in the rate of interest i . In particular, the formulae bearing the names of Steffensen, Poukka, Frucht, Evans, etc., all appear when suitable approximations and boundary conditions are employed. This is an ingenious synthesis of the various aspects of the interest problem in life contingencies.

Vir / Source: JIA, 73(1947), 2, via JSTOR: 41138792



Računske osnove / Calculation bases

x	l_x	D_x	N_x	S_x	d_x	C_x	M_x	R_x	e_x	$\ddot{a}_x$
65	88.722	6.932	91.522	892.847	839	63.03	3.412	57.181	18.38	13.20
66	87.883	6.602	84.590	801.326	915	66.10	3.349	53.769	17.55	12.81
67	86.968	6.282	77.987	716.736	1.024	71.13	3.283	50.420	16.74	12.41
68	85.944	5.970	71.705	638.749	1.163	77.67	3.212	47.138	15.94	12.01
69	84.781	5.662	65.735	567.044	1.311	84.19	3.134	43.926	15.15	11.61
70	83.470	5.360	60.073	501.309	1.456	89.91	3.050	40.792	14.39	11.21

Svi stolpci so odvisni od obrestne mere / The gray columns depend on the interest rate

Diskontirana števila živih in mrtvih

Discounted numbers of living and deaths

- $D_x = v^x l_x$
- $N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots$
- $S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \dots$
- $C_x = v^{x+1} d_x$
- $M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots$
- $R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \dots$

Aktuarske formule / Actuarial formulas

- $\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$
- $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$
- $A_x = \frac{M_x}{D_x}$
- $A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$
- $P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{M_x}{N_x}$
- $P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$

Problem iz prakse

Kako 4 % rokopisne tablice pravilno uporabiti za računanje s 5 %?

The interest rate problem

The main actuarial question that Ivo Lah dealt with was the interest rate problem. Lah defined it as the search for simple formulas for the rapid calculation of arbitrary insurance values at interest rates not accounted for in existing calculation bases. The methods established at the time were based on various interpolations (if tables for several interest rates were available), expansion into a Taylor series, and various approximation formulas.

Ivo Lah observed that the existing approximation formulas were either too complex or insufficiently accurate. In the article *Das Zinsfussproblem*, published in 1947 in the journal of the Swiss Association of Actuaries (*Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker*), he therefore presented an original synthesis of the various aspects of the interest rate problem.

In 1953, the Dutch actuary Willem J. C. de Heer (1903–1988) earned his doctorate in Amsterdam based on Lah's work, presenting the dissertation *Benaderingsformules voor actuariële grootheden bij overgang op andere interestvoet* (Approximate formulas for actuarial values when transitioning to another interest rate). In this 94-page dissertation, the entire 35-page Chapter 4 is dedicated to Ivo Lah's work.

A real-world problem

How to correctly use 4% handwritten tables to calculate with 5%?

Sodelovanje na mednarodnih kongresih in konferencah

Participation in international congresses and conferences

Udeležba na kongresih

Aktuarje je od leta 1895 združeval Comité Permanent des Congrès d'Actuaires, ki je v Bruslju izdal *Bulletin de Comité permanent des Congrès Internationaux d'Actuaires* in organiziral aktuarske kongrese. Komite se je leta 1968 preimenoval v International Actuarial Association (IAA), ta zveza pa se je leta 1998 preoblikovala tako, da njeni člani niso več posamezniki, ampak aktuarska združenja. Slovensko aktuarsko društvo je polnopravni član IAA od leta 2002.

Ivo Lah se je leta 1934 udeležil aktuarskega kongresa v Rimu in leta 1937 v Parizu. Leta 1940 kongres v Luzernu zaradi vojne ni bil izveden, izšli pa so zanj pripravljeni prispevki. V letih 1937–1976 je v kongresnih zbornikih objavil 9 prispevkov, o svoji udeležbi pa je napisal „Po vojni sem prejel več kot 50 vabil na nacionalne in mednarodne kongrese statistikov, aktuarjev in matematikov, vendar nikoli nisem šel, ker zame, ni bilo denarja.“

Kot statistik je v letih 1953–1957 s tremi prispevki sodeloval na kongresih Mednarodnega statističnega inštituta (International Statistical Institute (ISI)). Kot demograf pa je v letih 1954–1967 s petimi prispevki sodeloval na konferencah v (so)organizaciji Mednarodne zveze za znanstveno preučevanje prebivalstva (International Union for the Scientific Study of Population (IUSSP)).

IUSSP konference / IUSSP conferences

1. A contribution of the calculation of fertility tables on the basis of population census, 1954.
2. Analytische Ausgleichung der aus den Ergebnissen der Volkszählungen berechneten demographischen Tafeln, 1959.
3. Fundamental Equation of Statistical Phenomena, 1961.
4. A method of using census data for measurement of fertility, 1965.
5. Analytically graduated fertility of married women in Australia with respect to the duration of marriage, 1967.

Srečanja / Meetings

IUSSP konference IUSSP conferences	Aktuarški kongresi Actuarial congresses	ISI kongresi ISI congresses
1954 Roma	1937 Paris	1953 Roma
1959 Wien	1940 Luzern	1955 Rio de Janeiro
1961 New York	1951 Scheveningen	1957 Stockholm
1965 Beograd	1957 New York	
1967 Sydney	1968 München	
	1972 Oslo	
	1976 Tokio	

Aktuarški kongresi / Actuarial congresses

1. Die Sozialversicherung jugoslawischer Ein- und Auswanderer: das Prinzip der gegenseitigen internationalen Ergänzung der Sozialversicherung, 1937.
2. Le Taux d'Intérêt dans l'Assurance Sociale Yugoslave, 1937.
3. Tavole accumulate, 1937.
4. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Versicherungswesen, 1940.
5. Eine praktische Interpolationsformel des Zinsfußproblems, 1951.
6. Some simple and useful methods for the approximate computation of actuarial values for varying rate of interest and mortality, 1957.
7. Das Versicherungswesen in Jugoslawien, 1968.
8. Développement historique du contrôle officiel et de la surveillance de l'assurance privée en Yougoslavie, 1972.
9. Grundgleichungen der Versicherung, 1976.

Bulletin de Comité permanent des ...

1. Jugoslav Insurance Legislation in 1937, 1938.
2. Les assurances sociales en Yougoslavie pendant et après la deuxième guerre mondiale, 1948.

Participation in congresses

Actuaries have been united since 1895 by the Comité Permanent des Congrès d'Actuaires, which published the *Bulletin de Comité permanent des Congrès Internationaux d'Actuaires* in Brussels and organized actuarial congresses. In 1968, the Committee was renamed the International Actuarial Association (IAA), and in 1998, this association was reorganized so that its members were no longer individuals, but actuarial associations. The Slovenian Actuarial Association has been a full member of the IAA since 2002.

Ivo Lah attended the actuarial congress in Rome in 1934 and in Paris in 1937. In 1940, the congress in Lucerne was not held due to the war, but the papers prepared for it were published. In the years 1937–1976, he published 9 papers in the congress proceedings, and about his participation he wrote: “After the war, I received more than 50 invitations to national and international congresses of statisticians, actuaries and mathematicians, but I never went because ‘there was no money’ for me.”

As a statistician, he participated with three papers in the congresses of the International Statistical Institute (ISI) in the years 1953–1957. As a demographer, he participated with five papers in conferences (co-)organized by the International Union for the Scientific Study of Population (IUSSP) in the years 1954–1967.

ISI kongresi / ISI congresses

1. Ein Beitrag zur Berechnung der Heiratswahrscheinlichkeiten der Ledigen aus den Ergebnissen der Volkszählungen, 1954.
2. Social insurance statistics as a basis of economic forecasting, 1955.
3. Berechnung der Heiratswahrscheinlichkeiten der Ledigen, Verwitweten und Geschiedenen sowie Berechnung der Ehescheidungswahrscheinlichkeiten aus den Ergebnissen der Volkszählungen, 1957.

Računske osnove življenjskega zavarovanja

Actuarial Bases of Life Insurance

Pomembna in ambiciozna knjiga

Leta 1947 je v Zagrebu izšla trojezična knjiga *Računske osnovice životnog osiguranja / Matematičke osnove emporaxovaniya жизни / Bases techniques pour les assurances sur la vie*. V njej je zanimiv in poučen prikaz, kako se izdelujejo tablice umrljivosti in na njih temelječe aktuarske tabele. Poleg splošnih in zgodovinskih podatkov delo obravnava zbiranje in obdelavo statističnega materiala, izravnavo surovih verjetnosti smrti, navaja uporabljene matematične formule ter obravnava interpolacijske in podobne izračune za obrestne mere, za katere tablic ni.

Za praktično uporabo zadoščajo navodila za uporabo aktuarskih tabel. Te so bile za takratne zavarovalnice ključnega pomena, saj so uporabljale mnoge zastarele tabele drugih narodov ali zavarovalnic, posledično pa premije in rezerve niso bile dovolj natančne. V aktuarskih tabelah so upoštevane obrestne mere od 0 % do 6 % s korakom 1 % ter tabele umrljivosti za moške in ženske za starosti od 0 do 100 let, sestavljene na osnovi istih podatkov kot tiste, objavljene v članku *O rojstvih, življenju in umiranju Slovencev*, le da so vrednosti izravnane.

Koristna, a ideološko neprimerna knjiga

S to knjigo je avtor na pogajanjih o reparacijah tujim sogovornikom nedvomno lahko dokazal, da imajo njegovi izračuni trdne temelje.

V knjigi avtor s primerom in zapisom „*mehaniško izravnavanje se osriva na poznatom principu, natura non facit saltus*“ ilustrira, zakaj je potrebno izravnavanje. Ta latinski pregovor naj bi bil razlog, da je bila vsa naklada te „antimarksiistične“ knjige leta 1949 uničena, da ne bi prišlo do poslabšanja odnosa med Federativno ljudsko republiko Jugoslavijo in državami Informbiroja. Ohranilo se je le nekaj primerkov.

An important and ambitious book

In 1947, the trilingual book *Računske osnovice životnog osiguranja / Matematičke osnove emporaxovaniya жизни / Bases techniques pour les assurances sur la vie* was published in Zagreb. It contains an interesting and instructive presentation of how life tables and actuarial tables based on them are constructed. In addition to general and historical data, the work discusses the collection and processing of statistical material, the graduation of raw probabilities of dying, lists the formulas used, and discusses interpolation and similar calculations for interest rates for which tables do not exist.

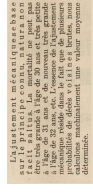
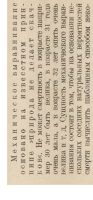
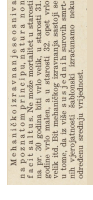
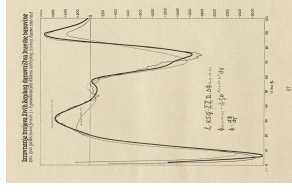
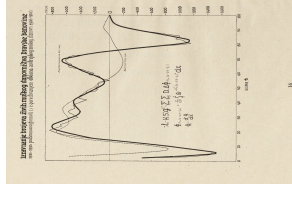
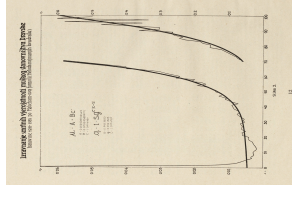
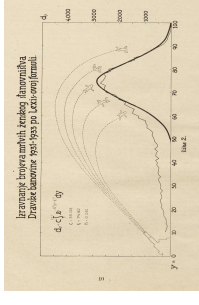
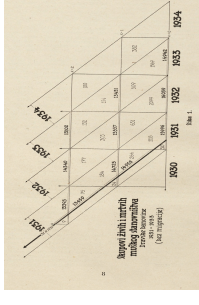
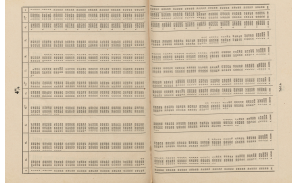
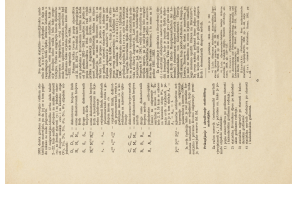
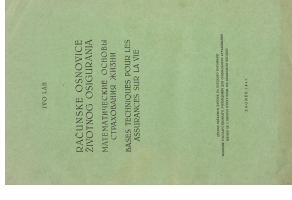
For practical use, the instructions for using actuarial tables are sufficient. These tables were of crucial importance for insurance companies at the time, as they used many outdated tables from other nations or insurance companies, and consequently, premiums and reserves were not precise enough. The actuarial tables take into account interest rates from 0% to 6% with a step of 1%, as well as life tables for males and females for ages 0 to 100 years, compiled on the basis of the same data as those published in the article *On births, lives and deaths of Slovenians*, except that the values are graduated.

A useful but ideologically inappropriate book

With this book, the author was undoubtedly able to prove to foreign interlocutors during the reparations negotiations that his calculations had solid foundations.

In the book, the author uses an example and the statement “*mechanical graduation is based on the well-known principle, natura non facit saltus*” to illustrate why graduation is necessary. This Latin proverb is said to be the reason why the entire edition of this “anti-Marxist” book was destroyed in 1949, in order to avoid a deterioration in relations between the Federal People's Republic of Yugoslavia and the Cominform countries. Only a few copies have survived.

Izravnavanje / Graduation



Lahova števila / Lah numbers

A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics

Prehodi med različnimi potencami

Za $n = 0$ naj bo $x^{\bar{0}} = x^0 = 1$, za $n = 1, 2, 3, \dots$ pa

$$(x)_n = x^{\bar{n}} = \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \quad \text{in} \quad x^{(n)} = x^{\underline{n}} = \prod_{k=0}^{n-1} (x-k).$$

(Nepredznačena) Stirlingova števila prve vrste $c(n, k)$ oz. $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ in Stirlingova števila druge vrste $S(n, k)$ oz. $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ povezujejo navadne in rastoče potence

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n c(n, k) x^k \quad \text{in} \quad x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} S(n, k) x^{\bar{k}}.$$

Predznačena Stirlingova števila prve vrste $s(n, k)$ oz. $(-1)^{n-k} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ in Stirlingova števila druge vrste $S(n, k)$ oz. $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ povezujejo navadne in padajoče potence

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k \quad \text{in} \quad x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) x^{\underline{k}}.$$

Lahova števila

Lahova števila $L(n, k)$ so definirana z $L(n, k) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!}$ in jih označujemo tudi z $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$. Neposredno povezujejo padajoče in rastoče potence

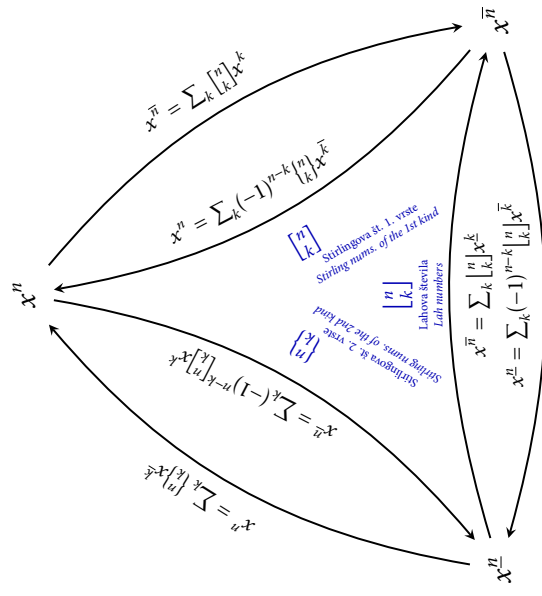
$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n L(n, k) x^{\underline{k}} \quad \text{in} \quad x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} L(n, k) x^{\bar{k}}.$$

Poimenovanje novih števil po Ivu Lah

Enačbe na „krakih“ trikotnika so znane že od leta 1730, na „osnovnici“ pa od leta 1954, ko je izšel članek *A new kind...* Pomembnost odkritja je opazil John Riordan, recenzent Lahovega članka *Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik* iz leta 1955. V svoji monografiji *An Introduction to Combinatorial Analysis* (1958) je nova števila poimenoval po Ivu Lah.

Stirlingova in Lahova števila

Stirling and Lah numbers



n	$c(n, k)$	$S(n, k)$	$L(n, k)$
0	1	1	1
1	0 1	0 1	0 1
2	0 1 1	0 1 1	0 2 1
3	0 2 3 1	0 1 3 1	0 6 6 1
4	0 6 11 6 1	0 1 7 6 1	0 24 36 12 1
5	0 24 50 35 10 1	0 1 15 25 10 1	0 120 240 120 20 1

Rekurzija / Recursion

$$L(0, 0) = 1, \quad L(n, 0) = 0 \quad (n \geq 1) \implies$$

$$L(n+1, k) = L(n, k-1) + (n+k) L(n, k) \quad (1 \leq k \leq n+1)$$

Transitions between different powers

For $n = 0$ let $x^{\bar{0}} = x^0 = 1$, and for $n = 1, 2, 3, \dots$

$$(x)_n = x^{\bar{n}} = \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \quad \text{and} \quad x^{(n)} = x^{\underline{n}} = \prod_{k=0}^{n-1} (x-k).$$

(Unsigned) Stirling numbers of the first kind $c(n, k)$ or $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ and Stirling numbers of the second kind $S(n, k)$ or $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ connect ordinary and rising factorial powers

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n c(n, k) x^k \quad \text{and} \quad x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} S(n, k) x^{\bar{k}}.$$

Signed Stirling numbers of the first kind $s(n, k)$ or $(-1)^{n-k} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ and Stirling numbers of the second kind $S(n, k)$ or $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ connect ordinary and falling factorial powers

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k \quad \text{and} \quad x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) x^{\underline{k}}.$$

Lah numbers

Lah numbers $L(n, k)$ are defined by $L(n, k) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!}$ and are also denoted by $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$. They directly connect falling and rising powers

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n L(n, k) x^{\underline{k}} \quad \text{and} \quad x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} L(n, k) x^{\bar{k}}.$$

Naming the new numbers after Ivo Lah

The equations on the “legs” of the triangle have been known since 1730, while those on the “base” date back to 1954, when the paper *A new kind...* was published. The importance of the discovery was noticed by John Riordan, a reviewer of Lah's 1955 paper *Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik*. In his monograph *An Introduction to Combinatorial Analysis* (1958), he named the new numbers after Ivo Lah.

Izjemno strokovno, znanstveno in poljudno delovanje

Exceptional professional, scientific, and public engagement

Trajna zapuščina

Ivo Lah je objavjal v številnih jugoslovanskih revijah. Nekatere so naštele v tabeli v srednjem stolpcu. V domačem časopisju je izdal več kot 1 000 poljudnih zapisov, nekaj pa v izseljenskem tisku v Severni in Južni Ameriki. V svoji karieri je objavil več kot 100 znanstveno-strokovnih člankov, od tega pomembnih del v uglednih tujih revijah. Nekaj teh del je navedenih v stolpcih na desni.

Rezultati večine Lahovih aktualskih člankov so bili ob izidu aktualni, danes pa so – zaradi napredka računalniške tehnike in podobno kot Vegovi logaritmovniki – le še zgodovinski spomenik. Lahova števila, ki so trajno pomembna, pa cvetijo, saj so vir številnih novih raziskav. V podatkovni bazi zbMath Open je indeksiranih 19 Lahovih člankov, v MathSciNet pa 10 (od tega jih je 7 v preseku). V prvi z iskanjem niza „Lah number“* dobimo 190 zadetkov, v Google Scholarju pa z analognim iskanjem kar 1 170 (stanje 12. 8. 2026).

Izbrana domača dela / Selected domestic papers

- 6%-ne računske osnove za račun kapitalnega pokriča SUOR-a [6% actuarial bases for calculation of SUOR capital funding], *Radnička zaščita*, 10(1928), 1, 47–58.
- Prvi veliki triumf statistike našega socialnega zavarovanja [The first great triumph of our social insurance statistics], *Radnička zaščita*, 15(1933), 3, 98–102.
- Nova praktična lastnost Gompertz-Makeham-ovega zakona umrljivosti [A new practical property of the Gompertz-Makeham law of mortality], *Radnička zaščita*, 17(1935), 4, 152–161.
- Istinski demografski gubici Jugoslavije u drugom svetskom ratu [The true demographic losses of Yugoslavia in the Second World War], *Statistička revija*, 2(1952), 2-3, 214–224.
- Problem kamatne stope [The interest rate problem], *Osiguranje i privreda*, 3(1962), 11, 41–45.

Domaće objave / Domestic papers

Publikacija Publication	Kraj Place	Št. člankov No. of arts.	Obdobje Period
Radnička zaščita	Zagreb	7	1928–1935
Bankarstvo	Zagreb	5	1931–1932
Trgovski tovariši, Domaći prijatelji, Tehnika in gosp.	Ljubljana	po 1 1 each	1931–1938
Socijalni arhiv	Beograd	3	1937–1940
Trgovski list, Slovenec, Slovenčev koledar	Ljubljana	skupaj 5 total 5	1942–1944
Vesnik rada	Beograd	2	1946–1948
Socijalno osiguranje (2 časopisa / 2 journals)	Zagreb	2	1946, 1953
Statistička revija	Beograd	13	1951–1957
Osiguranje i privreda	Zagreb	2	1962
Stanovništvo	Beograd	1	1970

Izbrane tuje objave / Selected foreign papers

- Die statistischen Rechnungsgrundlagen der Pensionsversicherung jugoslawischer Berg- und Hüttenarbeiter, *Blätter für Versicherungs-Mathematik, Beilage zur Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft*, 3(1935), 8, 271–298, 6 Anh.–S.
- Contribution to the calculus of the mathematical expectation, *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics*, 12(1953), 3, 247–264.
- Die Ableitungen der Versicherungswerte nach einzelnen Zinsmaßen, *Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik*, 2(1954), 1, 85–92.
- Das Restglied der Taylorschen Reihe des Rentenbarwertes und einige Formeln des Zinsfußproblems für grosse Zinsspannungen, *Scandinavian Actuarial Journal*, (1955), 3-4, 165–179.

Enduring legacy

Ivo Lah published in numerous Yugoslav journals. Some are listed in the table in the middle column. In the domestic press, he issued over 1,000 popular pieces, with some appearing in the emigrant press across North and South America. Throughout his career, he published more than 100 scientific and professional articles, a significant part in reputable foreign journals. Some of these works are listed in the left and this column.

At the time of publication, most of Lah's actuarial results were relevant; today – due to computer advancements and much like Vega's logarithms – they are merely historical monuments. In contrast, the permanently important Lah numbers flourish as a source of numerous new investigations. The zbMath Open database indexes 19 of Lah's papers, while MathSciNet contains 10 (with 7 in the intersection). A search for the phrase “Lah number” yields 190 hits in the former, whereas Google Scholar returns 1,170 (as of August 12, 2026).



- Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik, *Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik*, 7(1955), 3, 203–212.
- Analytical graduation of fertility rates, *Journal of the American Statistical Association*, 51(1956), 275, 461–466.
- Generalization of Yastremsky's Formula for Analytical Graduation of Fertility Rates, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A (General)*, 121(1958), 1, 100–104.

Z modernim umbralnim računom do Lahovih števil

Predstavljamo osnovni koncept modernega umbralnega računa, kakršnega sta razvila Gian-Carlo Rota in Steven Roman. Njun umbralni račun je sistematičen študij polinomskih zaporedij, ki ustrezajo formalnim potenčnim vrstam, pri čemer je uporabljena preprosta tehnika moderne algebre. Pokazali bomo, da Lahova števila povezujejo naraščajoče in padajoče potence in da nastopajo tudi kot koeficienti Laguerrovih polinomov v posebnem primeru.

Označimo:

$x^{\overline{n}} = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$, $x^{\overline{0}} = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$ za naraven $n \geq 1$ in posebej za $n = 0$: $x^{\overline{0}} = 1$, $x^{\overline{0}} = 1$. To so padajoče in naraščajoče potence, ki so v bistvu polinomi stopnje n . Zanje velja formula $(-x)^{\overline{n}} = (-1)^n x^{\overline{n}}$. Tako kot za navadne potence x^n veljata tudi za padajoče in naraščajoče potence binomski formuli

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}}, \quad (x+y)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}}.$$

Vse tri potence imajo rodovne funkcije:

$$\exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} t^n, \quad (1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\overline{n}}}{n!} t^n, \quad (1-t)^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\overline{n}}}{n!} t^n.$$

Zgornje potenčne vrste so formalne. Polinomi in vrste, ki jih tu uporabljamo, imajo koeficiente iz nekega polja s karakteristikno 0. V umbralnem računu vsaka formalna potenčna vrsta

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \quad (1)$$

igra vlogo linearnega funkcionala in linearnega operatorja na prostoru polinomov s predpisoma

$$\langle f(t) | x^n \rangle = a_n, \quad f(t)x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k x^{n-k}, \quad (2)$$

ki omogočata linearno razširitev na polinome.

V umbralnem računu so pomembne vrste (1), v katerih je $a_0 = 0$ in $a_1 \neq 0$. Take vrste imenujemo δ -vrste in so obrnljive v kompozicijskem smislu, kar pomeni, da obstaja taka vrsta $\tilde{f}(t)$, da velja $f(\tilde{f}(t)) = \tilde{f}(f(t)) = t$.

Vsaki δ -vrstij $f(t)$ pripada natanko določeno polinomsko zaporedje

$(p_n(x))_{n=0}^{\infty}$, kjer je $\deg p_n(x) = n$, tako da velja

$$\exp(x\tilde{f}(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(x)}{k!} t^k. \quad (3)$$

Pravimo, da je zaporedje $(p_n(x))_{n=0}^{\infty}$ pridruženo vrstij $f(t)$.

Vsak polinom $p(x)$ ima razvoj po tem zaporedju:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\deg p(x)} \frac{\langle f(t)^k | p(x) \rangle}{k!} p_k(x). \quad (4)$$

Rodovni funkciji za padajoče in naraščajoče potence preoblikujemo:

$$(1+t)^x = \exp(x \log(1+t)), \quad (1-t)^{-x} = \exp(-x \log(1-t)). \quad (5)$$

Za δ -vrstij $\log(1+t) = t - t^2/2 + \dots$ in $-\log(1-t) = t + t^2/2 + \dots$ sta kompozicijska inverza δ -vrstij

$$\exp(t) - 1 = t + t^2/2! + \dots, \quad 1 - \exp(-t) = t - t^2/2! + \dots,$$

kar pomeni, da so padajoče potence $x^{\overline{n}}$ pridruženi vrstij $\exp(t) - 1$, naraščajoče potence $x^{\overline{n}}$ pa vrstij $1 - \exp(-t)$.

Z uporabo razvoja (4) potem velja

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \frac{\langle (\exp(t) - 1)^k | x^{\overline{n}} \rangle}{k!} x^{\overline{k}}. \quad (6)$$

V umbralnem računu veljata pravili

$$\langle f(t) | p(x) \rangle = \langle 1 | f(t)p(x) \rangle, \quad \langle 1 | p(x) \rangle = p(0)$$

za vsako potenčno vrsto $f(t)$ v obliki (1) in vsak polinom $p(x)$. Zato lahko zapišemo

$$\langle (\exp(t) - 1)^k | x^{\overline{n}} \rangle = \langle 1 | (\exp(t) - 1)^k x^{\overline{n}} \rangle.$$

Ker velja za polinom $p(x)$ enakost $(\exp(t) - 1)p(x) = p(x+1) - p(x)$, dobimo najprej

$$(\exp(t) - 1)x^{\overline{n}} = n(x+1)^{\overline{n-1}}$$

in po k korakih

$$(\exp(t) - 1)^k x^{\overline{n}} = n(n-1)\dots(n-k+1)(x+k)^{\overline{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!} (x+k)^{\overline{n-k}}.$$

Ker je

$$(x+k)^{\overline{n-k}} \Big|_{x=0} = k(k+1)\dots(n-1) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!},$$

inamno

$$\frac{\langle (\exp(t) - 1)^k | x^{\overline{n}} \rangle}{k!} = \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{(n-1)!}{(k-1)!} = \frac{n!}{k!} \frac{(n-1)!}{(k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!} \frac{n}{k}.$$

Tako smo iz (6) razvili enakost

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \frac{(n-1)!}{(k-1)!} x^{\overline{k}},$$

v kateri nastopajo Lahova števila

$$L(n, k) = \frac{n!}{k!} \frac{(n-1)!}{(k-1)!}.$$

Izraz na desni strani ima pomen, če sta n in k naravni števili. Tedaj je $L(n, k) = 0$ za $k > n$. Posebej je treba vzeti $L(n, 0) = \langle 1 | x^{\overline{n}} \rangle = \delta_{n,0}$, kjer je n naravno število ali 0 in $\delta_{n,k}$ Kroneckerjev simbol. Veljata enakosti

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n L(n, k) x^{\overline{k}}, \quad x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} L(n, k) x^{\overline{k}}.$$

Druge enakost dobimo iz prve z zamenjavo $x \rightarrow -x$.

Laguerrovi polinomi $L_n(x)$ so pridruženi vrstij

$$f(t) = \frac{t}{t-1} = -t - t^2 - t^3 - \dots$$

Z znano transformo formulo jih lahko izrazimo eksplicitno:

$$\begin{aligned} L_n(x) &= f'(t) \left(\frac{f(t)}{t} \right)^{-n-1} x^n = (-1)^n (1-t)^{n-1} x^n = \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k t^k x^n. \end{aligned}$$

Po drugi formuli v (2) je $tx^n = nx^{n-1}$ in zato $t^k x^n = n! x^{n-k} / (n-k)!$ ter

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!} \frac{(n-1)!}{(k-1)!} (-x)^k.$$

Posebej sledi iz transferne formule $L_0(x) = 1$, za $n \geq 1$ pa se $L_n(x)$ potemtakem izražajo z Lahovimi števili:

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^n L(n, k) (-x)^k.$$

Steven Roman v svoji knjigi *The Umbral Calculus*, ki je prvič izšla leta 1984, omenja Lahova števila.

John Riordan podeli novim številom ime

Ivo Lah je leta 1954 predstavil svoja števila v članku *A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics* v portugalski reviji *Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses*. Takrat je bilo že dolgo znano, da lahko padajoče potence x^n in naraščajoče potence $x^{\overline{n}}$ izrazimo z običajnimi potencami x^n prek Stirlingovih števil.

A NEW KIND OF NUMBERS AND ITS APPLICATION IN THE ACTUARIAL MATHEMATICS

by Ivo Lah, Portugal

To transform functions into a form corresponding to a problem that conditions has to be solved, several kinds of numbers, viz. Stirling's numbers of the first and second kind, and their powers, are applied. In this paper, we will try to discuss a new kind of numbers, show their most important properties, and point out their application in the actuarial mathematics. Moreover, we would like to refer shortly to some previous Stirling's results.

Stirling's numbers of the first kind are used for the transforming of backward factorial

into a sum of powers

(1) $(X)_n = X(X-1)(X-2)\dots(X-n+1)$

(2) $(X)_n = \sum_{k=0}^n S_1(n, k) X^k$

(0) $(X)_n = X(X+1)(X+2)\dots(X+n-1)$

into a sum of backward factorials (3), viz.

(10) $(X)_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k s_1(n, k) X^k$

This values of s_1^k up to $n = 9, k = 8$, computed from (10) are given in the following table

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	1								
2	1	1							
3	1	3	1						
4	1	6	3	1					
5	1	10	6	1					
6	1	15	10	1					
7	1	21	15	6	1				
8	1	28	21	10	1				
9	1	36	28	15	6	1			
10	1	45	36	21	10	1			
11	1	55	45	28	15	6	1		
12	1	66	55	36	21	10	1		
13	1	78	66	45	28	15	6	1	
14	1	91	78	55	36	21	10	1	
15	1	105	91	66	45	28	15	6	1

Padajoče in naraščajoče potence so za naravna števila n definirane s predpisoma

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\dots(x-n+1), \quad x^{\overline{n}} = x(x+1)\dots(x+n-1),$$

pri čemer vzamemo $x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1$. Pri tem velja enakost $(-x)^{\underline{n}} = (-1)^n x^{\overline{n}}$. Vse našete potence so polinomi stopnje n .

Ivu Lahju je uspelo dopolniti manjkajoče. Našel je števila (označil jih je s S_n^{ν}), s katerimi lahko izrazimo naraščajoče potence s padajočimi in obratno za $n \geq 1$:

$$x^{\overline{n}} = \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu} S_n^{\nu} x^{\nu}, \quad x^{\underline{n}} = \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu} S_n^{\nu} x^{\nu}. \tag{1}$$

Druga enakost sledi iz prve z zamenjavo $x \rightarrow -x$. Smiselno je dodati še $S_n^0 = 0$ za $n \geq 1$, $S_0^0 = 1$ in $S_n^{\nu} = 0$ za $\nu > n \geq 1$.

Zavedal se je, da so števila S_n^{ν} , ki še niso imela imena, nova. Danes jih imenujemo *predznačena Lahova števila*.

Najprej je Lah izpeljal rekurzivno formulo za števila S_n^{ν} . Izhajal je iz formul $x^{\overline{n+1}} = (x+n)x^{\overline{n}}$ in $x^{\underline{n+1}} = (x-n)x^{\underline{n}}$ ter dobil za $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n+1} (-1)^{\nu+1} S_{n+1}^{\nu} x^{\nu} &= \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu} S_n^{\nu} (x+n) x^{\nu} = \\ &= \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu} S_n^{\nu} ((n+\nu) + (x-\nu)) x^{\nu} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu} S_n^{\nu} (n+\nu) x^{\nu} + \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu} S_n^{\nu} (x-\nu) x^{\nu} = \\ &= \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu} S_n^{\nu} (n+\nu) x^{\nu} + \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu} S_n^{\nu} x^{\nu+1} = \\ &= \sum_{\nu=1}^{n+1} (-1)^{\nu} S_n^{\nu} (n+\nu) x^{\nu} + \sum_{\nu=2}^{n+1} (-1)^{\nu} S_n^{\nu-1} x^{\nu} = \\ &= \sum_{\nu=1}^{n+1} (-1)^{\nu} ((n+\nu) S_n^{\nu} + S_n^{\nu-1}) x^{\nu}. \end{aligned}$$

Ker so potence $(x^{\nu})_{\nu=0}^{\infty}$ linearno neodvisne, iz dobljene enakosti

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} (-1)^{\nu+1} S_{n+1}^{\nu} x^{\nu} = \sum_{\nu=1}^{n+1} (-1)^{\nu} ((n+\nu) S_n^{\nu} + S_n^{\nu-1}) x^{\nu}$$

sledi rekurzivna formula

$$S_{n+1}^{\nu} = -(n+\nu) S_n^{\nu} - S_n^{\nu-1}. \tag{2}$$

Do formule za števila S_n^{ν} je Ivo Lah prišel tako, da je v prvo enakost v (1) po vrsti vstavljal $x = 1, 2, 3, \dots$. Za $x = 1$ je

$$1^{\overline{n}} = n! = (-1)^n S_{n+1}^1 = (-1)^n S_1^n,$$

torej je

$$S_n^1 = (-1)^n n! = (-1)^{\frac{n!}{1!}} \binom{n-1}{0}.$$

Za $x = 2$ imamo

$$2^{\overline{n}} = (n+1)! = (-1)^n S_n^1 2^{1-1} + (-1)^n S_n^2 2^{2-2} = 2n! + 2(-1)^n S_n^2,$$

iz česar sledi

$$S_n^2 = (-1)^n \frac{1}{2} n! (n-1) = (-1)^n \frac{n!}{2!} \binom{n-1}{1}.$$

Za $x = 3$ dobimo

$$\begin{aligned} 3^{\overline{n}} &= \frac{(n+2)!}{2!} = (-1)^n S_n^1 3^{1-1} + (-1)^n S_n^2 3^{2-2} + (-1)^n S_n^3 3^{3-3} = \\ &= 3n! + 3n!(-1) + (-1)^n 3! S_n^3, \end{aligned}$$

kar nam da

$$S_n^3 = (-1)^n \frac{n! (n-1)(n-2)}{3! 2!} = (-1)^n \frac{n!}{3!} \binom{n-1}{2}.$$

Iz tega je Ivo Lah sklepal, da velja za $n \geq \nu \geq 1$ splošna formula

$$S_n^{\nu} = (-1)^n \frac{n!}{\nu!} \binom{n-1}{\nu-1}. \tag{3}$$

Avtor pripomni, da zapisani rezultat dokazemo z uporabo rekurzivne formule (2).

V članku je zapisanih več enakosti, ki vsebujejo Stirlingova in nova števila ter primer uporabe.

Leta 1955 je Ivo Lah objavil v nemški reviji *Mitteilungsblatt für mathematische Statistik und ihre Anwendungsgebiete* podoben članek *Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik*.

Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik

Von I. Lah, (Portugal)

1) Die von Stirling im Jahre 1730 (Backlund differentialrechnung) eingeführten Stirling'schen Zahlen S_n^{ν} sind die Koeffizienten der Entwicklung der Stirling'schen Zahlen $(x)_n$ nach x^{ν} . Diese Zahlen sind die Stirling'schen Zahlen erster Art S_n^{ν} (denn zur Transformation der nach unten geordneten Fakultäten

(1) $(x)_n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$

(2) $(x)_n = \sum_{\nu=1}^n S_n^{\nu} x^{\nu}$.

3) Analog (0) und (1) können wir eine Differenzengleichung auch für die aufwärts berechneten der Zahlen S_n^{ν} aufstellen. La sei

(11) $(x)_{n+1} = (x+n)(x)_n = \sum_{\nu=1}^n (x-1)^{\nu+1} S_{n+1}^{\nu} (x)_n$.

Aus (0) und (11) folgt

(12) $\sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu} (x-n+1+\nu) S_n^{\nu} (x)_n + \sum_{\nu=1}^{n+1} (-1)^{\nu} S_{n+1}^{\nu} (x)_n = 0$.

oder auch äquivalente Umformungen

(13) $\sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu} (x)_n (S_n^{\nu+1} - (n+\nu) S_n^{\nu} + S_{n+1}^{\nu}) = 0$.

Daher

(14) $S_{n+1}^{\nu} = -S_n^{\nu-1} - (n+\nu) S_n^{\nu}$.

Die Ähnlichkeit der Differenzengleichungen (0), (5) und (14) ist offenkundig.

Članek je bil tako zelo všeč ameriškemu matematiku Johnu Riordanu (1903–1988), da je števila (3) imenoval *Lahova števila*, označil jih je z $L_{n,k}$ in jih vključil v knjigo *An Introduction to Combinatorial Analysis*, ki je prvič izšla leta 1958. V njej so $L_{n,k}$ predznačena Lahova števila.

16. Lah numbers. * Define the numbers $L_{n,k}$ by the equation $(-x)_n = \sum_{k=0}^n L_{n,k} x^k$, so that $(\partial_x)_n = \sum_{k=0}^n L_{n,k} (\partial_x)^k$.

* I. Lah, Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik, *Mitteilungsbl. Math. Statist.*, vol. 7 (1955), pp. 203–212.

Dandanes za nepredznačena Lahova števila navadno uporabljamo oznaki $L(n, k)$ in L_k^n . Pri Riordanu je $(x)_n = x^{\underline{n}}$. V njegovi knjigi je tudi nekaj nalog v zvezi z Lahovimi števili.

(i) Write $L_n(x) = \sum_{k=0}^n L_{n,k} x^k$

From the relation $\sum_{k=0}^n (-1)^k L_{n,k} x^k = x^{\underline{n}} = x(x-1)\dots(x-n+1)$ show that

$L_n(x) = \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{x+1} \right)^n$

and, hence, that $L_{n,k} = (-1)^k \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1}$

(*) (3) that this result satisfies the recurrence in (6) and the boundary condition.

$$L(n, k) = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1}$$
$$L_{n,k} = (-1)^n L(n, k)$$

Po uvedbi Lahovih števil je bilo objavljenih precej člankov v zvezi z njimi.

Friderik Žorga kot Lahov soavtor

Kratek življenjepisa

Friderik Žorga se je rodil 10. julija 1909 v Trstu. Leta 1934 je diplomiral iz matematike na univerzi v Ljubljani, isto leto kot znani profesorji Ivan Štalec, Jože Povšič in Alojzij Vadnal. Poučeval je kot suplent na državni gimnaziji v Kumanovem, nato je bil z ministrskim odlokom premeščen v Mursko Soboto in kasneje v Ljubljano, kjer je poučeval na več srednjih šolah. Leta 1941 se je poročil z Danico Brodar (1920–1974). Umrli je leta 1994 v Ljubljani. Pokopan je na ljubljanskih Žalah. Bil je tudi član Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovencev.



Leva: Mladoporočnica Friderik Žorga in Danica Brodar. Foto: Peter Lampič. Vir: The European Museums Network. Desno: Friderik Žorga premaguje ovire. Vir: www.dlib.si

Športna dejavnost

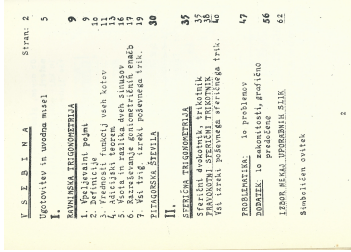
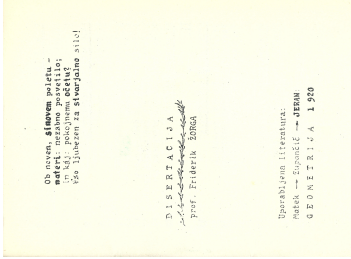
Po prihodu iz Trsta v Ljubljano je bil Žorga aktiven v atletskem klubu *Primorje*, ki so ga v Ljubljani ustanovili Primorci, potem ko so bili okoli leta 1920 zapustili Italijo. Predvsem se je posvečal tekom na srednje dolge proge. Leta 1928 je postavil jugoslovanski rekord v teku na 800 m. Zaradi tega dosežka je bil kandidat za nastop na olimpijskih igrah v Amsterdamu istega leta, a ga niso uvrstili v olimpijsko ekipo. Leta 1930 je nastopal v teku na 1500 m in dosegel takrat najboljši slovenski rezultat.

Bil je tudi atletski sodnik in športni delavec. Za svoje dolgoletno delo v atletiki je leta 1981 prejel Bloudkovo priznanje.

Strokovna dela

V sistemu Cobiss so tale dela, pri katerih je Žorga avtor ali soavtor:

1. Tabele za finančno in aktuarsko matematiko (skupaj z Ivom Lahom), DZS, Ljubljana, 1947.
2. Procentna tabela za šolo in prakso, [s.n.], Ljubljana, 1951.
3. Finančna matematika, [s.n.], Ljubljana, 1956.
4. Geometrija za ekonomske srednje šole (skupaj z Danijelom Andolškom), LMS na ESŠ, Ljubljana, 1956.
5. Tabele za finančno matematiko, [s.n.], Ljubljana, 1959.
6. Trigonometrija, Ljubljana, 1961.



Iz Žorgove Trigonometrije – disertacije. Avtorjev osebno podarjeni izvod.

Besedila za petje

Na spletni strani sb.nuk.uni-lj.si najdemo zapise, ki pričajo, da je Žorga napisal naslednja besedila za zborovsko petje:

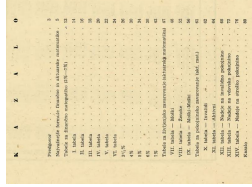
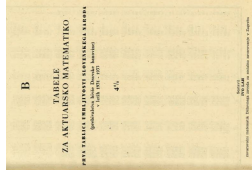
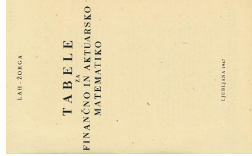
1. K soncu Olimpija, 1955.
2. Olimpijska himna, 1956.
3. Pesem študentov, 1957.

Pesmi je uglasbil skladatelj Milan Grm.



Skupno delo z Ivom Lahom

Knjigo *Tabele za finančno in aktuarsko matematiko* sta Ivo Lah in Friderik Žorga izdala leta 1974. Delo obsega 79 strani in pokriva ekonomiko, finančno ter aktuarsko matematiko, zavarovanja in pokojnine.



V predgovoru sta avtorja zapisala:

Tabele za finančno in aktuarsko matematiko so sestavljene kot priročnik za dijakke gospodarskih šol in za finančne uradnike ter aktuarje. Tabele niso izčrpane, upoštevajo le najvažnejše zavarovalne vrednosti (po obrestni meri 4 %). Z njimi sva hotela omogočiti predsem dijakom, da se seznanijo z osnovnimi načeli finančnih in zavarovalno-tehničnih računov.

Predgovor zaključita z besedami:

Za pokojninsko zavarovanje so izbrane računске osnove Državnega zavoda za socialno zavarovanje, ki so sestavljene na podlagi: a) Prve tablice umrljivosti slovenskega naroda (prebivalstva bivše Dravske banovine v letih 1931–1933), b) Statistike rodbinskega stanja zavarovancev bivšega Federalnega zavoda za socialno zavarovanje Slovenije v Ljubljani na dan 31. XII. 1945 in c) Smrtnih ter invalidnih verjetnosti rudarjev in rudarskih upokojencev javnega premoga v bivši Avstriji v desetletju 1904–1913. Ta rudarska statistika se v veliki meri nanaša na slovenske rudarje.

Sledi nekaj strani formul in pojasnil, ki sodijo k tabelam v nadaljevanju. Razdeljene so takole:

- A. Finančna matematika.
- B. Aktuarska matematika življenjskega zavarovanja.
- C. Aktuarska matematika pokojninskega zavarovanja.

Predmeti iz zapuščine Iva Laha

Items from the Ivo Lah Estate

